

Równania różniczkowe zupełne

Niech będą dane funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ posiadające ciągłe pochodne pierwszego rzędu w pewnym płaskim obszarze D , a ponadto niech funkcja $Q(x, y)$ nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie tego obszaru.

Równanie różniczkowe: $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ można zapisać w postaci:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

gdzie: $dx \neq 0$ jest różniczką zmiennej niezależnej x , dy zaś jest różniczką niewiadomej funkcji $y(x)$.

Definicja 1

Mówimy, że równanie (1) jest równaniem różniczkowym zupełnym, gdy istnieje funkcja $u(x, y)$ posiadająca ciągłe pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie w obszarze D , której różniczka zupełna równa się lewej stronie tego równania, a więc gdy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad \text{w obszarze } D.$$

Na przykład równanie $2x dx + 3y^2 dy = 0$ jest zupełne w obszarze płaskim D ponieważ lewa strona tego równania jest różniczką zupełną funkcji $u(x, y) = x^2 + y^3$.

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ klasy C^1 (tzn. mające ciągłe pochodne pierwszego rzędu) w obszarze $D = \{(x, y); x \in (a, b) \wedge y \in (c, d)\}$ spełniają warunek $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ oraz funkcja $Q(x, y)$ nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie tego prostokąta, to wzór $u(x, y(x)) = C$, w którym funkcja $u(x, y)$ jest określona równością:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt \quad (2)$$

przedstawia całość ogólną równania różniczkowego (1), a ponadto przez każdy punkt (x_0, y_0) prostokąta D przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.

Przykład 1

Znaleźć całość ogólną równania:

$$(x^3 + xy^2 + 1) dx + (x^2y + y^3) dy = 0 \quad (3)$$

Ponieważ: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$ i $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$ więc w obszarze D bez punktów osi Ox , są spełnione wszystkie założenia twierdzenia 1.

Zgodnie ze wzorem (2) otrzymujemy:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x (x^3 + xy^2 + 1) dx + \int_{y_0}^y (x_0^2y + y^3) dy = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + x + \frac{x_0^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C_1$$

gdzie: C_1 jest pewną stałą zależną od obranego punktu (x_0, y_0) z obszaru D .

$$\text{Zatem wzór } \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + x + \frac{x_0^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C$$

przedstawia całkę ogólną równania (3).

Czynnik całkujący

Przypuśćmy, że równanie $P(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$ nie jest równaniem różniczkowym zupełnym. Weźmy pod uwagę funkcję $\mu(x, y)$ klasy C^1 w obszarze D .

Zakładamy ponadto, że tej samej klasy są w tym obszarze funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$.

Rozważmy równanie:

$$\mu(x, y) \cdot P(x, y) dx + \mu(x, y) \cdot Q(x, y) dy = 0 \quad (4)$$

będące wynikiem pomnożenia równania (1) przez $\mu(x, y)$.

Definicja 2

Mówimy, że funkcja $\mu(x, y)$ jest czynnikiem całkującym równania (1), gdy równanie (4) jest równaniem różniczkowym zupełnym w obszarze D .

Inaczej mówiąc, funkcja $\mu(x, y)$ jest czynnikiem całkującym równania (1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia w obszarze D równanie:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Przykład 2

Równanie:

$$(3x + 2y + y^2) dx + (x + 4xy + 5y^2) dy = 0 \quad (5)$$

nie jest równaniem różniczkowym zupełnym, ponieważ:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 2y \text{ oraz } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 4y$$

czyli warunek $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nie jest spełniony w żadnym obszarze płaskim.

Mnożąc obustronnie równanie (5) przez funkcję $\mu(x, y) = x + y^2$ otrzymamy:

$$(x + y^2)(3x + 2y + y^2) dx + (x + y^2)(x + 4xy + 5y^2) dy = 0 \text{ czyli:}$$

$$(3x^2 + 2xy + 4xy + 2y^3 + y^4) dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4) dy = 0 \quad (6)$$

Z łatwością możemy sprawdzić, że równanie (6) jest równaniem różniczkowym zupełnym w dowolnym obszarze płaskim. Zatem funkcja $\mu(x, y) = x + y^2$ jest czynnikiem całkującym równania (5).

Inne podejście do równania różniczkowego zupełnego

Niech będzie dane równanie różniczkowe zupełne:

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0 \quad (7)$$

Aby rozwiązać to równanie wystarczy znaleźć funkcję $\rho(t, x)$ taką, by:

$$M(t, x) = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} \text{ oraz } N(t, x) = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}.$$

Jeśli znajdziemy funkcję $\rho(t, x)$ spełniającą powyższe równości, to rozwiązaniem ogólnym równania (7) będzie:

$$\rho(t, x) = C \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Aby znaleźć funkcję $\rho(t, x)$, całkujemy funkcję $M(t, x)$ po zmiennej t . Otrzymujemy:

$$\rho(t, x) = \int M(t, x) dt + g(x) \quad (8)$$

gdzie: $g(x)$ jest pewną na razie nieznaną funkcją klasy C^1 .

Aby wyznaczyć $g(x)$ obliczamy pochodną po x z obu stron równania (8).

Otrzymujemy:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} = N(t, x) = \frac{\partial(\int M(t, x) dt)}{\partial x} + g'(x).$$

Z drugiej części powyższej równości wyznaczamy: $g'(x) = N(t, x) - \frac{\partial(\int M(t, x) dt)}{\partial x}$

Całkując po x otrzymamy $g(x)$ a zatem postać funkcji $\rho(t, x)$ stanie się wiadoma i równa postaci (8).

Przykład 3

Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$(t + x) dt + (t - x) dx = 0 \quad (9)$$

Tu $M(t, x) = t + x$ oraz $N(t, x) = t - x$.

Łatwo sprawdzić, że $\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t}$, a więc równanie (9) jest równaniem różniczkowym zupełnym.

$$\text{Obliczamy } \rho(t, x) = \int M(t, x) dt = \frac{t^2}{2} + t \cdot x + g(x)$$

$$\text{Stąd obliczając pochodną względem } x: N(t, x) = t - x = \frac{\partial \left(\frac{t^2}{2} + tx + g(x) \right)}{\partial x} = t + g'(x)$$

Czyli $t - x = t + g'(x)$. Stąd otrzymujemy, że $g'(x) = -x$.

Całkując po x powyższą równość otrzymujemy:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (9) jest postaci:

$$\rho(t, x) = \frac{t^2}{2} + tx - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Dla sprawdzenia obliczamy $\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = t + x = M(t, x)$ i $\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} = t + x = N(t, x)$.

Przykład 4

Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy = 0 \quad (10)$$

1. Sprawdzamy, czy równanie (10) jest równaniem różniczkowym zupełnym czyli czy:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \cdot (-e^y) \text{ oraz } \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y \cdot \left(-\frac{2x}{(1 + x^2)^2} \right)$$

Widać, że oba wyrażenia są takie same czyli równanie jest zupełne.

2. Szukamy funkcji $F(x, y)$, takiej aby $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$

Wybieramy $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1 + x^2}$

Całkujemy względem y i otrzymujemy:

$$F(x, y) = \int \frac{e^y}{1 + x^2} = \frac{e^y}{1 + x^2} + \phi(x)$$

Obliczamy pochodną względem x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2xe^y}{(1 + x^2)^2} + \phi'(x) = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} \text{ (Ostatni składnik to } P(x, y)\text{)}$$

$$\text{Stąd } \phi'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

Całkując $\phi'(x)$ po x otrzymujemy:

$$\phi(x) = \int \frac{2x}{(1 + x^2)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-1} dt = -\frac{1}{t} + C \text{ (zastosowano podstawienie } t = 1 + x^2\text{)}.$$

$$\text{Czyli } \phi(x) = -\frac{1}{1 + x^2} + C$$

$$\text{Ostatecznie } F(x, y) = \frac{e^y}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} + C = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + C.$$